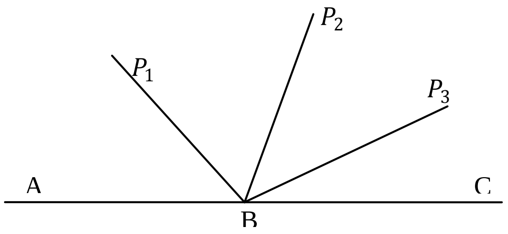
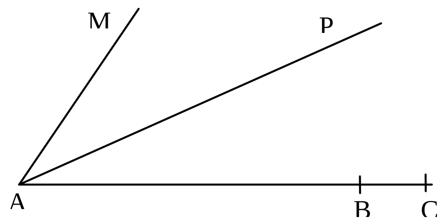
Coliniaritate.

Puncte coliniare. Trei sau mai multe puncte distince sunt coliniare dacă există o dreaptă care le conţine. Pentru a demonstra coliniaritatea unor puncte sunt disponibile diverse strategii construite pe baza relaţiilor generate de coliniaritatea a trei puncte.

1) Punctele distincte A, B şi C sunt coliniare dacă ele determină un unghi alungit (reprezentarea a), adică $m(\measuredangle ABC) = 180°$ sau punctele distincte A, B şi C sunt coliniare dacă ele determină un unghi nul (reprezentarea b), adică $m(\measuredangle BAC) = 0°$



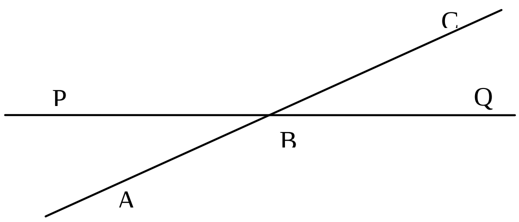
a)



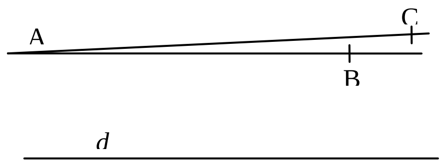
b)

În situaţia din reprezentarea a) obţinem coliniaritatea punctelor A, B şi C dacă (de exemplu) are loc relaţia: $m(\measuredangle ABP_2) + m(\measuredangle P_2BC) = 180°$ (sau $m(\measuredangle ABP_1) + m(\measuredangle P_1BP_2) + m(\measuredangle P_2BP_3) + m(\measuredangle P_3BC) = 180°$). De asemenea putem obţine coliniaritatea punctelor A, B şi C dacă (vezi b) are loc relaţia: $m(\measuredangle MAB) - m(\measuredangle MAC) = 0°$ (sau $m(\measuredangle PAB) - m(\measuredangle PAC) = 0°$).

2) Dacă două unghiuri au doar vârf comun, sunt congruente şi cu două dintre laturi în prelungire (acestea completând dreapta d), iar interioarele lor sunt de o parte şi de alta a dreptei d, atunci şi celelalte două laturi sunt una în prelungirea celeilalte (reprezentarea c). $B \in PQ$, iar A şi C sunt în semiplane diferite (semiplane determinate de dreapta PQ) astfel încât $m(\measuredangle PBA) = m(\measuredangle QCA)$ (Teorema reciprocă teoremei unghiurilor opuse la vârf)



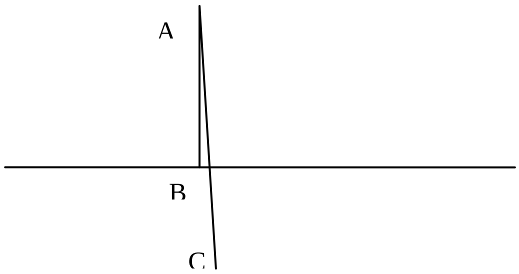
c)



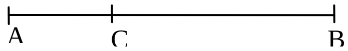
d)

3) Printr-un punct exterior unei drepte se poate construi o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată (reprezentarea d). Dacă $A \notin d$ iar $AB \parallel d$ şi $AC \parallel d \implies AB = AC$, adică A, B, C coliniare.

4) Printr-un punct oarecare din plan se poate construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată (acel punct poate să fie exterior dreptei sau se poate afla pe dreaptă) $A, C \notin d$, $B \in d$ astfel încât $AB \perp d$ şi $AC \perp d$ (reprezentarea e) $\implies AB = AC$, adică A, B, C coliniare.



e)



f)

5) Punctele A, B şi C sunt coliniare dacă şi numai dacă are loc oricare dintre relaţiile: $AB = AC + CB$ (reprezentarea f) sau $AC = AB + BC$ sau $BC = BA + AC$

6) În timp se vor utiliza şi alte modalităţi de a demonstra coliniaritatea, de exemplu cea oferită de teorema lui Menelaus (reciproca acestei teoreme).

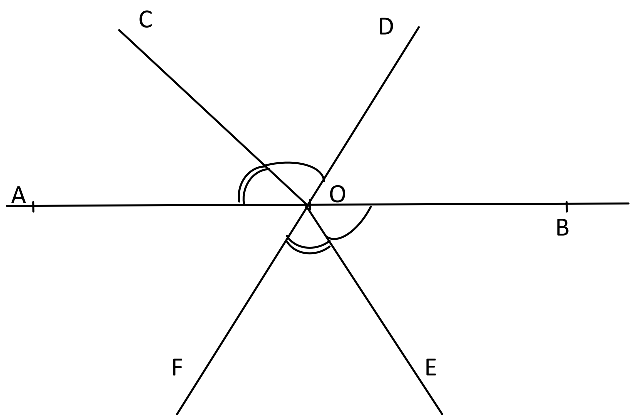
Este bine să reţinem câteva coliniarităţi remarcabile. Spre exemplu: într-un triunghi *ABC,* avem:

- centrul cercului circumscris O, centrul de greutate G şi ortocentrul triunghiului H sunt coliniare (se află pe dreapta lui Euler)
- punctul lui Nagel N, centrul de greutate G şi centrul cercului înscris I sunt coliniare (se află pe dreapta lui Nagel)

Probleme rezolvate.

P1. Se consideră punctele *A, O, B* coliniare, în această ordine. Semidreptele $[OC$ şi $[OD$ sunt de aceeaşi parte a dreptei *AB*, astfel încât $(OC \subset \mathcal{I}nt\widehat{AOD}$. Semidreptele $[OE$ şi $[OF$ sunt de cealaltă parte a dreptei *AB*, astfel încât $E \in \mathcal{I}nt\widehat{BOF}$, $\widehat{BOE} \equiv \widehat{COD}$ şi $\widehat{EOF} \equiv \widehat{AOC}.$

a) Demonstraţi că punctele *D, O* şi *F* sunt coliniare;
b) Demonstraţi că punctele *C, O* şi *E* sunt coliniare dacă şi numai dacă $(OC$ este bisectoarea lui $\widehat{AOD}$



Dacă *A,O* şi *B* sunt coliniare, atunci $m\widehat{AOB} = 180°$

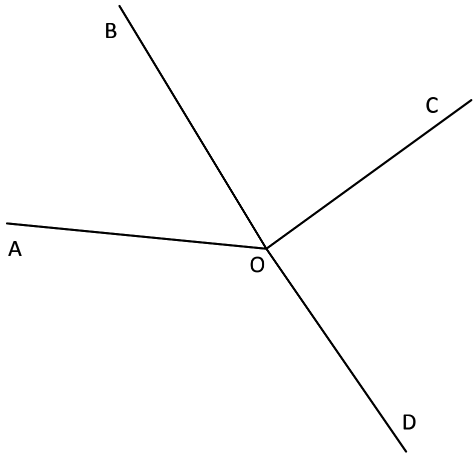
a) Dar
$m\widehat{DOB} = 180° - (m\widehat{AOC}+\widehat{COD})$
$m\widehat{FOA} = 180° - (m\widehat{EOF}+\widehat{EOB})$
Şi având în vedere congruenţele date obţinem că $m\widehat{DOB} = m\widehat{FOA}$, care sunt astfel unghiuri opuse la vârf, ceea ce implică faptul că $[OD$ şi $[OF$ sunt semidrepte opuse. Deci punctele *D, O* şi *F* sunt coliniare.

b) Dacă $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}$, avem $m\widehat{AOC} = m\widehat{COD}.$
Şi cum $m\widehat{BOE} = m\widehat{COD}$ deducem că $m\widehat{BOE} = m\widehat{AOC}$ şi de aici obţinem coliniaritatea punctelor *C, O* şi *E.*

Iar dacă *C, O* şi *E* sunt coliniare atunci $\widehat{EOF} \equiv \widehat{COD}$ şi cum din enunţ avem şi $\widehat{EOF} \equiv \widehat{AOC}$ (conform tranzitivităţii relaţiei de congruenţă) obţinem $\widehat{COD} \equiv \widehat{AOC}$, deci $[OC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}.$

P2. Se consideră punctele *A, B, C* astfel încât $B \in (AC)$. Luăm punctele D şi E sunt de o parte şi de alta a dreptei *AC*, iar semidreptele $[BM$ şi $[BN$ să fie bisectoarele unghiurilor $\widehat{DBC}$ şi P3. Unghiurile $\measuredangle AOB, \measuredangle BOC, \measuredangle COD$ şi $\measuredangle DOA$ sunt unghiuri formate în jurul punctului O, cu interioarele disjuncte şi au măsurile direct proporţionale cu patru numere naturale consecutive. Arătaţi că punctele *B, O* şi *D* sunt coliniare.

(Et jud Timiş)



Fie $n \in \mathbb{N}$. Avem:

$$\frac{m\widehat{AOB}}{n} = \frac{m\widehat{BOC}}{n+1} = \frac{m\widehat{COD}}{n+2} = \frac{m\widehat{DOA}}{n+3} = \frac{360°}{4n+6} = \frac{180°}{2n+3}$$

Avem de asemenea

$$\frac{m\widehat{BOC}}{n+1} = \frac{m\widehat{COD}}{n+2} = \frac{m\widehat{BOC}+m\widehat{COD}}{2n+3}$$

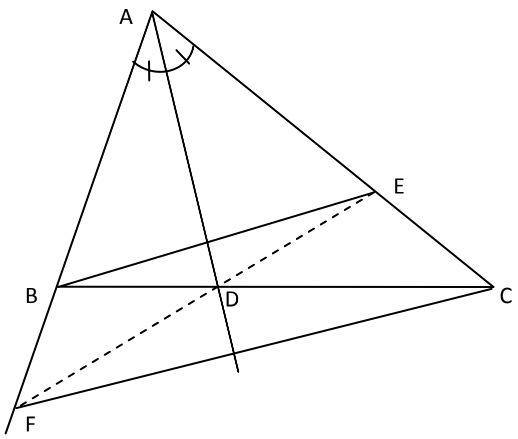
Prin urmare

$\frac{m\widehat{BOC}+m\widehat{COD}}{2n+3} = \frac{180°}{2n+3}$ de unde $m\widehat{BOC} + m\widehat{COD} = 180°$, adică $\widehat{BOD}$ este unghi alungit, ceea ce înseamnă coliniaritatea punctelor *B, O* şi *D*

P3. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ din triunghiul *ABC*, $D \in [BC]$. Perpendicularele duse din punctele *B* şi *C* pe *AD* intersectează dreptele *AC* şi *AB* în *E*, respectiv *F*. Să se demonstreze:

a) *AD* este mediatoarea segmentelor $[BE]$ şi $[CF]$;

b) punctele *D, E, F* sunt coliniare



AD⊥BE şi $[AD$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ ne conduce la ΔABE isoscel. Dar CF ∥ BE deoarece sunt perpendiculare pe aceeaşi dreaptă. Deci şi ΔAFC este isoscel.

(1) Astfel *BECF* este un trapez isoscel şi diagonalele unui trapez isoscel se intersectează pe bisectoarea unghiului format de laturile neparalele. Deci EF este cealaltă diagonală şi trece prin punctual D

sau

(2) ΔABE şi ΔAFC fiind isoscele, $[AB] \equiv [AE]$, $[AC] \equiv [AF]$ şi $\widehat{BAC} \equiv \widehat{EAF}$ ceea ce conduce la $\Delta ABC \equiv \Delta AEF$ de unde, mai departe $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AFE}$. În continuare, mai obţinem şi

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{ADF} \equiv \widehat{ADC}\\ \widehat{ADB} \equiv \widehat{ADE}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BDF} \equiv \widehat{EDC}, \text{ cu } B, D, C \text{ coliniare.}$$

Deci şi punctele E, D, F sunt coliniare

Concurenţă.

Drepte concurente: Două sau mai multe drepte sunt concurente dacă au un punct comun.

Să reţinem că:

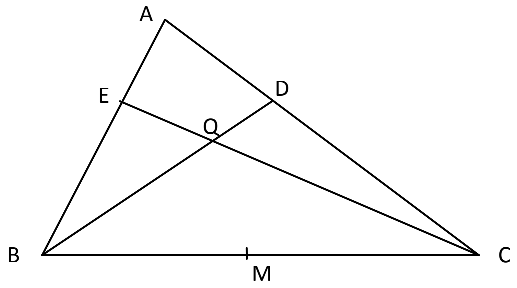
Două drepte situate în acelaşi plan, dacă nu sunt paralele atunci sunt concurente.

Pentru a demonstra concurenţa a trei drepte identificăm un punct prin care trec cele trei drepte. Acesta poate fi:

- Un punct fix (spre exemplu mijlocul unui segment)
- Centrul de greutate al triunghiului (ca intersecţie de linii care se dovedesc a fi mediane)
- Ortocentrul triunghiului (ca intersecţie de linii care se dovedesc a fi înălţimi)

- Centrul cercului circumscris triunghiului (ca intersecţie de linii care se dovedesc a fi mediatoare)
- Centrul cercului înscris în triunghi (ca intersecţie de linii care se dovedesc a fi bisectoare)

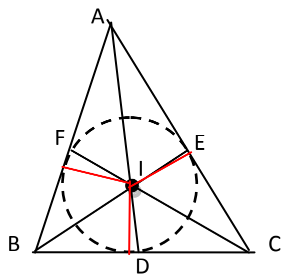
De altfel, o problemă de concurenţă a dreptelor se poate „comuta” (poate fi reformulată) pe o problemă de coliniaritate.



$BD \cap CE = \{Q\}$
Concurenţa dreptelor *AM*, *BD* şi *CE* este echivalentă cu coliniaritatea punctelor *A*, *Q* şi *M* .

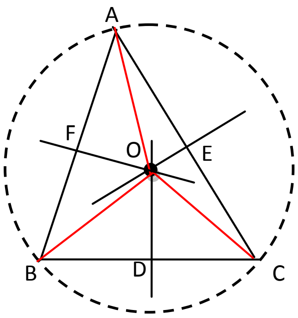
Concurenţele „clasice”, adică concurenţele liniilor importante în triunghi sunt cunoscute. Să le reamintim:

Bisectoarele unghiurilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurenţă este egal depărtat de laturile triunghiului.



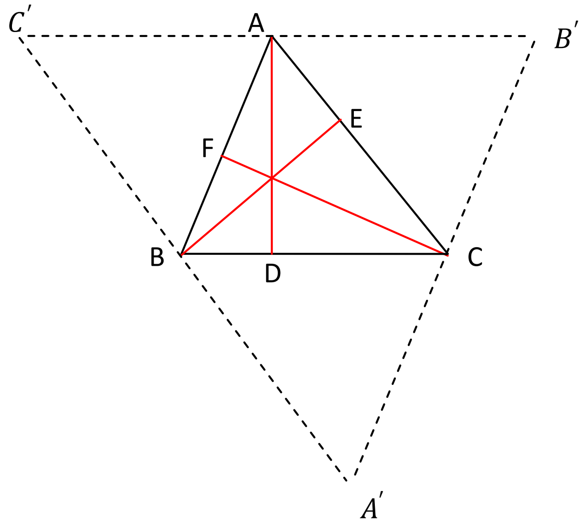
$\left(AD \subset Int\,\widehat{BAC}\right.$ cu $D \in (BC)$; $\left(BE \subset Int\,\widehat{ABC}\right.$ cu $E \in (AC)$ şi $\left(CF \subset Int\,\widehat{ACB}\right.$ cu $F \in (AB)$.
Fiecare bisectoare a unghiului unui triunghi intersectează latura opusă unghiului repectiv. Unghiurile $\widehat{BAC}$ şi $\widehat{ACB}$ au suma măsurilor mai mică de 180°. Bisectoarele lor sunt concurente. Fie $\{I\} = AD \cap CF$.
Folosim proprietatea punctelor bisectoarei şi pentru $I \in (AD$ avem $d(I;AB) = d(I;AC)$, iar pentru $I \in (CF$ avem $d(I;CA) = d(I;CB)$.
Prin urmare obţinem (prin tranzitivitate) că $d(I;AB) = d(I;CB)$ ceea ce ne dă că $I \in (BE$.

Mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurenţă este egal depărtat de vârfurile triunghiului.



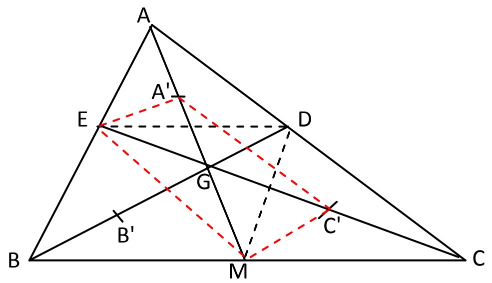
Mediatoarele laturilor (de exemplu $[BC]$ şi $[AC]$) sunt concurente. În caz contrar ar fi paralele. Şi cum latura $[BC]$ este perpendiculară pe mediatoarea ei, iar latura $[AC]$ de asemenea, atunci am avea din punctul *C* două perpendiculare distincte pe aceeaşi direcţie , ceea ce este absurd. Prin urmare cele două mediatoare sunt concurente în *O*. Astfel avem că $d(O;B) = d(O;C)$ şi $d(O;C) = d(O;A)$. Prin urmare avem şi $d(O;B) = d(O;A)$, adică *O* aparţine şi mediatoarei laturii $[AB]$.

Înălţimile unui triunghi sunt concurente.



Se duc paralele la laturile triunghiului, prin vârfurile triunghiului (vezi figura). Se formează astfel paralelogramele *ABCB'*, *ACBC'*, *ACA'B*. $AD \perp BC$, iar $BC \parallel C'B'$ conduce la $AD \perp C'B'$. Şi cum *AB'* = *AC'* (= BC), înseamnă că înălţimea *AD* din triunghiul *ABC*, devine mediatoarea laturii $[C'B']$ din triunghiul $A'C'B'$. Analog înălţimile *BE* şi *CF* sunt mediatoare pentru laturile $[C'A']$ şi respectiv $[A'B']$ din acelaşi triunghi $A'C'B'$. Deoarece mediatoarele sunt concurente (vezi demonstraţia anterioară) avem astfel şi concurenţa înălţimilor.

În orice triunghi, medianele sunt concurente. Pe oricare dintre mediane distanţa de la vârf la punctul de concurenţă este dublul distanţei de la punctul de concurenţă la mijlocul laturii opuse.



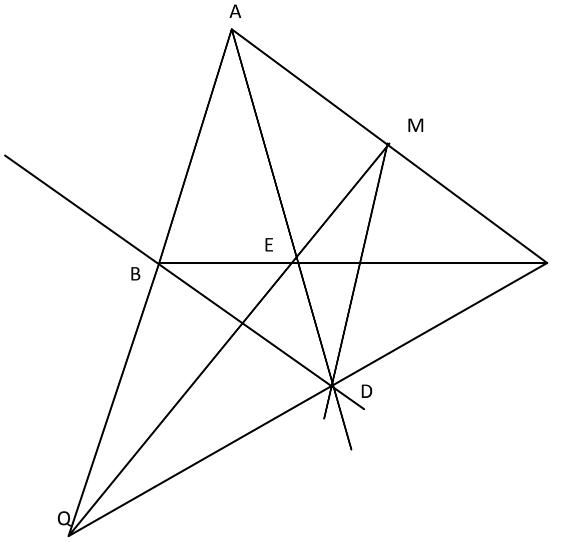
M, *D* şi *E* sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[AC]$ şi respectiv $[AB]$. $M \in (BC) \Longrightarrow M \in \mathfrak{Int}\widehat{BAC}$, iar $E \in (AB) \Longrightarrow E \in \mathfrak{Int}\widehat{BCA}$. Cum $m\widehat{ABC} + m\widehat{BCD} < 180°$ există $\{G\} = AM \cap CE$. Fie A' mijlocul segmentului $[AG]$, B' mijlocul segmentului $[BG]$ iar C' mijlocul segmentului $[CG]$. $[EA']$ devine astfel linie mijlocie în ΔABG iar $[MC']$ linie mijlocie în ΔBCG . $[EA']$ şi $[MC']$ sunt paralele cu $[BG]$ şi au lungimea jumătate din lungimea acestui segment. Obţinem paralelogramul *MC'A'E* la care diagonalele se înjumătăţesc, adică avem $GM = GA'$ şi $GE = GC'$. Având în vedere faptul că A' şi C' sunt mijloacele segmentelor $[AG]$ şi respectib $[CG]$ avem de fapt următoarele egalităţi: $GM = GA' = A'A$ şi $GE = GC' = CC'$. Analog pentru alte două mediane şi cumulând concluziile finale, avem punctul G ca şi punct de concurenţă al medianelor, punct care pe fiecare mediană determină raportu precizat în enunţ.

În problemele de concurenţă, rolul rezolvitorului (adeseori) este de a identifica în configuraţii geometrice linii care sunt înălţimi, madiatoare sau bisectoare într-un anumit triunghi. Problemele solicită demonstrarea coliniarităţii sau concurenţei, sau pot avea alte cerinţe în care coliniaritatea unor puncte sau concurenţa anumitor drepte sunt instrumente utile în obţinerea concluziilor dorite.

De asemenea în timp apar şi alte strategii care ne ajută să demonstrăm concurenţa, un exemplu în acest sens fiind reciproca teoremei lui Ceva.

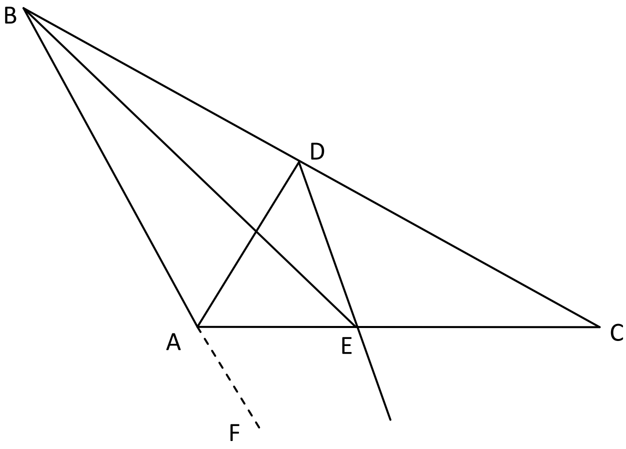
Probleme rezolvate.

P1 Prin mijlocul *M* al laturii $[AC]$ a triunghiului *ABC* se duce paralela la latura $[AB]$, iar prin vârful *B*, paralela la latura $[AC]$, notându-se cu *D* intersecţia acestora şi cu *E* intersecţia dreptelor *AD* şi *BC*. Să se demonstreze că dreptele *AB, ME* şi *CD* sunt concurente.



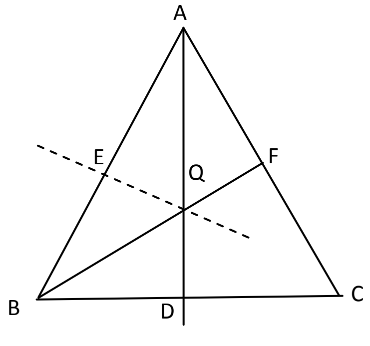
Soluţie:
$AB \parallel MD$ şi $MD \cap CD = \{D\}$, deci $CD \cap AB \neq \Phi$. Fie Q acest punct de intersecţie.
Deoarece $AB \parallel MD$ cu M mijlocul lui $[AC]$ conduce la $[MD]$ linie mijlocie în ΔAQC, deci D este mijlocul lui $[CQ]$. Apoi $BD \parallel AC$ cu D mijlocul lui $[QC]$ conduce de asemenea la $[BD]$ linie mijlocie în ΔAQC. Înseamnă că $[AD]$ şi $[CB]$ sunt mediane ale triunghiului AQC, iar E este centrul de greutate al acestui triunghi.
Deducem de aici că $[MQ]$ (cu $E \in [MQ]$) este a treia median a triunghiului.

P 2. Fie un triunghi isoscel *ABC*, cu $m\widehat{BAC} = 120°$, în care D este mijlocul laturii $[BC]$. Să se arate că AC şi bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ADC}$ sunt concurente.



Fie E punctul de intersecţie al laturii $[AC]$ cu bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$.
$m\widehat{BAC} = 120° \Longrightarrow m\widehat{EAF} = 60°$. ΔABC este isoscel şi atunci $[AD]$ este median, înălţime şi bisectoare; prin urmare $m\widehat{BAD} = m\widehat{DAE} = 60°$. Şi astfel avem că $[AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAF}$. În această situaţie $d(E; AF) = d(E; AD)$ (1). Cum $[DE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$, atunci $d(E; AD) = d(E; DC)$ (2). Din (1) şi (2) obţinem că $d(E; AF) = d(E; DC) \Leftrightarrow d(E; BA) = d(E; BC)$ ceea ce înseamnă că E aparţine şi bisectoarei unghiului $\widehat{ABC}$ şi astfel avem că latura $[AC]$ şi bisectoarele unghiurilor $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{ADC}$ sunt concurente în E.

P3. Să se arate că dacă într-un triunghi *ABC*, bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, înălţimea din *B* şi mediatoarea laturii $[AB]$ sunt concurente, atunci şi bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, înălţimea din *C* şi mediatoarea laturii $[AC]$ vor fi concurente.



Fie Q punctul de intersecţie dintre mediatoarea laturii $[AB]$ (cu E mijlocul laturii), bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ şi înălţimea corespunzătoare laturii $[AC]$ (fie F piciorul acestei înălţimi). În acest caz avem $[QA] \equiv [QB]$, ΔQAB este isoscel cu $m\widehat{QBA} = m\widehat{QAB}$. $[AQ$ fiind bisectoare avem şi $m\widehat{QAB} \equiv m\widehat{DAC}$. Notăm $m\widehat{QBA} = m\widehat{QAB} = x$ după care avem : $m\widehat{QAB} = m\widehat{DAC} = x,\ m\widehat{BAC} = 2x$. $\widehat{AQF}$ este unghi exterior triunghiului *QAB*, deci $m\widehat{AQF} = 2x$. Deoarece $[BF] \perp [AC]$, atunci în ΔAQF avem $2x + x = 90°$, de unde $x = 30°$. Astfel avem: $m\widehat{BAC} = 60°, m\widehat{ABF} = 30°$.
Fie $[CC']$ înălţimea corespunzătoare laturii $[AB]$. Atunci în $\Delta ACC'$: $m\widehat{ACC'} = 30°$. Fie M punctul de intersecţie al acestei înălţimi cu bisectoarea unghiului $m\widehat{BAC}$. Deoarece $m\widehat{ACC'} = m\widehat{CAM} = 30°$ înseamnă că ΔMAC este isoscel cu baza $[AC]$ şi atunci mediatoarea acesteia va trece prin vârful M al triunghiului.

Probleme propuse.

1. Se consideră punctele A, B, C astfel încât $B \in (AC)$. Luăm punctele D şi E sunt de o parte şi de alta a dreptei AC, iar semidreptele $[BM$ şi $[BN$ să fie bisectoarele unghiurilor $\widehat{DBC}$ şi respectiv, $\widehat{ABE}$. Arătaţi că dacă punctele M, B şi N sunt coliniare, atunci şi punctele D, B şi E sunt coliniare.

2. Fie triunghiul ABC cu $AB < AC$ şi $D \in (BC)$ astfel încât $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$. Fie $E \in (AB$ şi $F \in (AC$ astfel încât $B \in (AE), C \in (AF)$. Ştiind că $BE = AC - AB + CF$ să se arate că punctele A, D şi mijlocul segmentului $[EF]$ sunt coliniare.
3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic $(AB < AC < BC)$. Prin B se duce o paralelă la AC, iar prin C se duce o paralelă la AB, acestea intersectându-se în M. Arătaţi că dacă D este un punct pe latura $[BC]$ astfel încât $m(\measuredangle DAB) = m(\measuredangle DMC)$, atunci punctele A, D şi M sunt coliniare.

4. Pe latura $[BC]$ a triunghiului ABC ($AB < AC$) se ia punctul P astfel încât $[AP] \equiv [BP]$. iar paralela prin C la AB intersectează pe AP în R. Arătaţi că punctele P, M mijlocul laturii $[AB]$ şi N mijlocul segmentului $[CR]$ sunt coliniare.

5. Fie un triunghi ABC, D simetricul centrului de greutate faţă de mijlocul lui $[AB]$ şi E simetricul lui C faţă de B. Să se arate că A, D, E sunt coliniare.

6. Pe latura $[AB]$ a triunghiului echilateral ABC se iau punctele M şi N astfel încât $AM = BN < \frac{AB}{2}$. Fie $P \in (AC)$ astfel încât $[MN] \equiv [CP]$. Paralela prin N la dreapta MP intersectează pe BC în Q. Fie $\{D\} = AQ \cap BP$. Să se demonstreze că punctele $E \in (AB)$, C şi D, sunt coliniare dacă şi numai dacă, $[AE] \equiv [EB]$.

7. Fie $[AD$ bisectoarea unghiului BAC al triunghiului ABC, $D \in (BC)$. Perpendicularele duse din punctele B şi C pe AD intersectează dreptele AC şi AB în E, respective F. Să se demonstreze că:
   a) AD este mediatoarea segmentelor $[BE]$ şi $[CF]$.
   b) Punctele D, E şi F sunt coliniare.

8. Pe laturile $[AB]$ şi [BC] ale pătratului $ABCD$ se construiesc triunghiul echilateral ABE în interior si triunghiul echilateral BCF, respective, în exteriorul pătratului. Arătaţi că punctele D, E, F sunt puncte coliniare.

9. Pe laturile unui unghi propriu $\widehat{xOy}$ se consideră punctele $A, B \in (Ox$ $(A \neq B)$ şi $C, D \in (Oy$ $(C \neq D)$ astfel încât $[OA] \equiv [OC]$ şi $[OB] \equiv [OD]$. Demonstraţi că dreptele AD, BC şi OM sunt concurente, $(OM$ fiind bisectoarea unghiului $\widehat{xOy}$.

10. Măsurile unghiurilor $\hat{A}$, $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ din triunghiul ABC sunt proporţionale cu numerele 2, 3 şi 4. Demonstraţi că mediatoarea corespunzătoare laturii $[AC]$, bisectoarea unghiului $\widehat{BCA}$ şi dreapta AB sunt concurente.

11. Fie ABC un triunghi isoscel cu baza $[BC]$. În exteriorul lui se construiesc pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ca şi baze, triunghiurile isoscele ADB şi AEC astfel încât $\Delta ADB \equiv \Delta AEC$. Arătaţi că BE, CD şi bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ sunt concurente.

12. În exteriorul triunghiului ABC considerăm triunghiurile dreptunghice isoscele ABD şi ACE cu ipotenuzele AD, respective AE. Să se demonstreze că înălţimea din A a triunghiului ABC şi dreptele DC şi BE sunt concurente.

(Al Zăgrăian, Cluj)

13. În ΔABC cu $m\hat{A} = 15°$ şi $m\hat{C} = 30°$, se ia pe latura $[AC]$ un punct D, astfel încât $[AD] \equiv [BC]$. Arătaţi că bisectoarea unghiului C şi mediatoarea segmentului $[BD]$ se întâlnesc într-un punct E situate pe latura $[AB]$.

14. Fie ΔABC obtuzunghic $\left(m\widehat{ABC} > 90°\right)$, iar punctul D simetricul lui B faţă de mijlocul segmentului $[AC]$. Fie M şi N mijloacele segmentelor $[AB]$ şi $[CD]$. Dacă E este simetricul lui D faţă de M, F este simetricul lui B faţă de N, să se arate că:
    a) Punctele C, B şi E sunt coliniare
    b) Dreptele AC, MN şi EF sunt concurente.

15. Fie ΔABC în care $[AD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ ($D \in (BC)$). Fie $P \in (AB)$ şi $Q \in (AC)$, astfel încât $[AP] \equiv [AQ]$. Arătaţi că triunghiul ABC este isoscel dacă şi numai dacă dreptele AD, BQ şi CP sunt concurente.

16. În ΔABC, punctul D este mijlocul liniei frânte ABC, E este mijlocul liniei frânte ACB iar F este mijlocul liniei frânte BAC. Prin punctele D, E şi F se duc paralele b, c şi a la bisectoarele unghiurilor $\hat{B}$, $\hat{C}$ şi respectiv $\hat{A}$. Demonstraţi că dreptele a, b şi c sunt concurente.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. E. Panaitopol, L. Panaitopol – PROBLEME CALITATIVE DE GEOMETRIE PLANĂ, Editura GIL
[2] Enache Pătraşcu – PROBLEME DE CONCURENŢĂ ŞI COLINIARITATE, Editura NEURON
[3] Colecţia GM Seria B