Principiul invarianţilor

Principiul invarianţilor stă la baza unor strategii de rezolvare pentru anumite probleme. Aceste probleme descriu un context în care se petrec transformări repetate asupra unei situaţii (stări), sau se acţionează cu câteva operaţii diverse (arbitrar alese) asupra acesteia. Dacă aceste transformări păstrează la fiecare etapă „ceva" neschimbat, sau periodic regăsim aceeaşi caracteristică (proprietate, relaţie) înseamnă că avem un *invariant* . În acest caz ne putem raporta la acest invariant pentru a analiza ce se întâmplă şi a determina soluţia, starea finală, respectiv ce se obţine după etapele de un anumit rang.

Soluţie favorabilă vom avea dacă rezultatul sau starea finală respectă proprietatea (caracteristica), în caz contrar deducem că succesiunea de transformări nu poate conduce la un astfel de rezultat (o astfel de stare).

Problemele de acest tip încep de cele mai multe ori prin a descrie o stare iniţială. Apoi se precizează modul în care se acţionează asupra ei. Se poate acţiona cu o anumită operaţie care se repetă de mai multe ori, sau pot fi câteva variante de operaţii care pot acţiona (alegerea uneia îi aparţine celui care acţionează) asupra acestei stări. După care se poate cere (de exemplu) să precizăm:

- starea finală (un rezultat final);
- dacă poate fi stare finală o anumită situaţie (precizată în enunţ);
- cine (dacă sunt cel puţin doi care operează) va ajunge la o stare finală favorabilă;
- descrierea strategiei necesare (în cazul unor operaţii diferite) care să permită unuia dintre cei care operează să obţină starea finală favorabilă.

În alte probleme avem descrisă o transformare care se produce prin acţiunea repetată (de n ori, sau de o infinitate de ori), sau se descriu câteva operaţii diferite pentru a căror acţiune se optează. Aceste transformări acţionează asupra unui *obiect* (sau asupra câtorva obiecte), sau pot acţiona într-o mulţime sau într-un şir. La astfel de probleme se poate solicita:

- starea iniţială, dacă se cunoaşte cea finală şi natura operaţiilor care s-au făcut ;
- starea k_i dacă se cunoaşte starea k_1 (iar transformarea trece prin n stări şi $k_i < n$);
- să stabilim dacă putem obţine o stare k_2 dintr-o stare cunoscută k_1

Invarianţii pot fi:

- valoare constantă pentru anumite caracteristici cantitative (sume, diferenţe, produse ...);

  Ex: Sume sau diferenţe
Produse sau Rapoarte
Ultima cifră
- calitatea de: pătrat perfect, cub perfect;
- paritatea rezultatelor obţinute după fiecare transformare sau după un anumit număr de transformări, sau chiar paritatea rezultatului final;
- relaţie de congruenţă (mod n);
- relaţie de recurenţă;
- o anumită monotonie;
- păstrarea unei anumite poziţii faţă de un reper;
- verificarea unei relaţii de către coordonatele punctelor (din plan);
- un punct fix al unei configuraţii geometrice;
- proprietate (geometrică).

Exemple.

E 1. Fie mulţimea $A = \{1, 2, 3, \ldots 169\}$. Putem scrie această mulţime ca reuniune de submulţimi disjuncte, cu cel puţin 3 elemente, astfel încât în fiecare submulţime, cel mai mare element să fie egal cu suma celorlalte elemente din submulţimea respectivă?

Dacă partiţionăm mulţimea *A*, vom regăsi toate elementele ei redistribuite în diferite submulţimi. Suma tuturor acestor elemente este aceeaşi. Cum $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 169 = (169 \cdot 170): 2 = 14365$, reţinem că este ***impară***. Fiecare submulţime din partiţie, care verifică relaţia dată, va avea suma elementelor sale egală cu dublul elementului cu valoare maximă – adică un număr par. Şi atunci partiţionarea mulţimii *A* are doar submulţimi cu suma elementelor număr par. Prin urmare S = 14365 ar fi rezultatul unei adunări cu toţi termenii numere pare, ceea ce este imposibil. Deci nu putem găsi pentru mulţimea *A* o astfel de partiţie.

E 2. Fie mulţimile $A = \{n \in \mathbb{N}^* | \ n \leq 10^{10}\}$ şi respectiv $B = \{x = n - s(n) | \ s(n) = suma\ cifrelor\ numărului\ n;\ \ n \in A\}$. Stabiliţi dacă 3441052991 este element al mulţimii B?

După cum ştim, un număr natural şi suma cifrelor sale sunt congruente *modulo 9* (dau acelaşi rest la împărţirea cu nouă). Astfel pentru orice *n* număr natural, $n - s(n) = \mathcal{M}_9$. Deci elementele mulţimii B sunt ***multipli de 9*** şi pentru că 3441052991$\neq \mathcal{M}_9$ deducem că nu poate fi element al mulţimii B.

E 3. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, . . . , 2015. La fiecare pas avem voie să ştergem oricare două numere, şi în locul lor să scriem restul împărţirii sumei lor la 7. După câţiva paşi, pe tablă rămân scrise două numere, din care unul este egal cu 765. Care este numărul al doilea?

Cochetăm din nou cu suma acestor numere.
$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2015 = (2015 \cdot 2016): 2 = 2031120$. Operând cu împărţire la 7, evaluăm această sumă din acest punct de vedere al relaţiei de congruenţă modulo 7 şi observăm că $S = 2031120 = \mathcal{M}_7$. Urmărim cum acţionează transformarea descrisă. Suma *S* o mai putem scrie şi $S = a + b + (S - a - b)$ unde *a* şi *b* sunt cele două numere pe care operăm. După primul pas, obţinem: $S = r + (S - a - b)$ (1) unde *r* este restul împărţirii lui $a + b$ la 7 adică un număr natural mai mic decât 7 ($a + b = 7k + r$). Dacă urmărim relaţia (1) observăm că aceasta devine $S = r + (S - a - b) = (a + b) - 7k + S - (a + b) = S - 7k = \mathcal{M}_7$. Astfel am obţinut invariantul: ***suma numerelor de pe tablă este mereu un multiplu de 7***. Acum putem analiza finalul transformărilor. Avem două numere, din care unul este 765. Evident acesta este unul dintre numerele iniţial scrise pe tablă. Celălalt va fi un $r < 7$. Uşor de determinat având în vedere că $(765 + r) \equiv 0(mod 7)$. Deci al doilea număr este 5.

E 4. Pe o tablă sunt scrise la început numerele 11 şi 13. Apoi se operează în mod repetat după cum urmează: se scrie un nou număr (diferit de cele existente) egal cu suma a două numere (arbitrar alese, după ce pe tablă vor fi cel puţin trei numere) scrise deja pe tablă.

a) Arătaţi că indiferent de câte ori se aplică operaţia, pe tablă nu poate fi scris numărul 86.
b) Este posibil ca după mai mulţi paşi, pe tablă să fie scris numărul 2015?

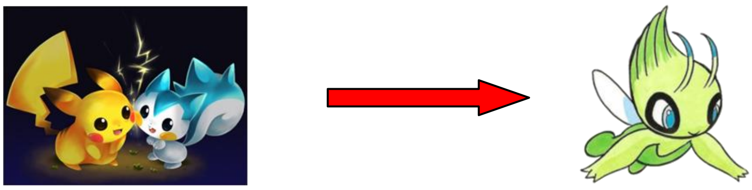
Deci avem 11 şi 13. După un prim pas mai apare şi $24 = 11 + 13$. Apoi mai poate să apară şi 35 = 24 + 11= 2·11 + 13 sau 37 = 24 + 13 = 11 + 2·13. La următorul pas poate fi scris unul dintre numerele 46, 48, 50, 59 şi 61 (59 = 3·11 + 2·13). Şi aşa mai departe. În această situaţie ceea ce avem ca reper este faptul că un număr *n* scris pe tablă este dat de relaţia: $\boldsymbol{n = x \cdot 11 + y \cdot 13}$, $x, y \in \mathbb{N}$ (numărul scris pe tablă este suma dintre un multiplu de 11 şi un multiplu de 13). Numărul 86 poate fi scris pe tablă dacă există numerele naturale *x* şi *y* ($x < 7$, respectiv $y < 6$) astfel încât $86 = x \cdot 11 + y \cdot 13$.
$86 - 2y = x \cdot 11 + y \cdot 11 \Leftrightarrow 2(43 - y) = 11(x + y)$ iar $43 - y \neq \mathcal{M}_{11}$ pentru $y < 6$. Prin urmare nu vom avea pe tablă numărul 86. Îl verificăm pe 2015. $2015 = 11 \cdot x + 13 \cdot y \Leftrightarrow 11(183 - x - y) = 2(y - 1)$ şi avem că $y - 1 = \mathcal{M}_3$ iar x şi y au aceeaşi paritate. Rezolvăm ecuaţia (diofantică) şi obţinem soluţii,

(exemplu x = 169 şi y =12). Prin urmare numărul 2015 este posibil să fie scris pe tablă după un anumit număr de paşi.

E 5. Iniţial pe o tablă este scris numărul 1. Sunt permise următoarele operaţii: să fie înmulţit numărul cu 3, sau să rearanjăm cifrele numărului (dacă acesta are cel puţin 2 cifre). Este posibil ca după asemenea câteva operaţii să obţinem numărul 999?

După primul pas, se obţine un multiplu de 3. La fel în continuare, vom avea multipli de 3. Chiar dacă operăm prin permutarea cifrelor, suma cifrelor este aceeaşi şi înseamnă că după fiecare operaţie (indiferent care va fi aceasta) vom avea un $\mathcal{M}_3$. Acum urmărim dacă e posibil să ajungem la 999.
$999 = 3 \cdot 333 = 3 \cdot 3 \cdot 111 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$
Dar $37 \neq \mathcal{M}_3$. Dacă provine de la un număr la care am permutat cifrele, acesta poate fi doar 73 care de asemenea nu este un $\mathcal{M}_3$. Astfel că de la 1 la 999 nu se poate ajunge prin operaţiile descrise.

E 6. În parcul de joacă al pokemonilor există 43 pokemoni albaştri, 47 pokemoni galbeni şi 51 pokemoni verzi. Când se “ciocnesc” doi pokemoni de culori diferite, ei îşi schimbă culorile în cea de a treia culoare. Este posibil ca la un moment dat în parc toţi pokemonii să fie de aceeaşi culoare?



Analizăm ce se întâmplă după o ciocnire a pokemonilor. Dacă au aceeaşi culoare nu se modifică nimic. Dacă au culori diferite, automat cei doi pokemoni vor primi a treia culoare. Deci numărul de pokemoni cu această a treia culoare va creşte cu 2 iar numărul pokemonilor de la celelalte două culori se va reduce pentru fiecare cu 1. E posibil să avem în parc pokemoni cu aceeaşi culoare dacă la un moment dat ajungem să avem acelaşi număr de pokemoni pe două culori diferite. Să urmărim această variantă favorabilă. Fie x – numărul pokemonilor albaştri, y – numărul pokemonilor galbeni şi z – numărul pokemonilor verzi, la un moment dat. După o ciocnire care implică modificări avem: $(x, y, z) \longrightarrow (x-1, y-1, z+2)$. Schimbarea pe aceeaşi culoare devine posibilă dacă $x-1 = y-1$ sau $x-1 = z+2$ sau $y-1 = z+2$ ceea ce conduce la $x = y$ sau $z = x+3$ (sau $z = y+3$) ceea ce înseamnă că diferenţa dintre numerele pokemonilor de culori diferite să fie 0 sau $\mathcal{M}_3$. Deoarece în cazul de faţă oricare diferenţă nu verifică această condiţie, înseamnă că nu e posibil ca toţi pokemonii să fie de aceeaşi culoare.

E 7. În figura (1) de mai jos două pătrate se consideră vecine dacă au o latură comună. Să considerăm operaţia T: alegem două numere din două pătrate vecine şi le adăugăm acelaşi număr întreg. Se poate obţine din figura (1) figura (2) după câteva aplicări convenabile ale transformării T?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

(1)

7	8	9
6	2	4
3	5	1

(2)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

7	8	9
6	2	4
3	5	1

Avem o tablă 3×3, ne putem gândi să colorăm ca pe o tablă de şah. Fie S_a suma numerelor din pătratele albe, iar S_n suma numerelor din pătratele negre. Observăm că operaţia T nu schimbă diferenţa $S_a - S_n$.
În (1) avem $S_a - S_n = 25 - 20 = 5$ şi dacă aplicăm câteva transformări avea după oricâte aplicări $S_a - S_n = (25 + k) - (20 + k) = 5$. În (2) avem $S_a - S_n = 22 - 23 = -1$. În concluzie nu putem obţine starea descrisă în (2) din starea descrisă în figura (1)

Probleme propuse

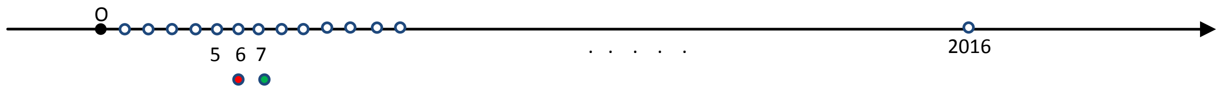
1. Se consideră numerele $1, 2, 3,\ 4, \dots, 2010, 2011$. Ştergem două numere (la întâmplare) din şir şi scriem în locul unuia diferenţa numerelor şterse (diferenţa se face astfel încât rezultatul să fie număr natural). Repetăm acest procedeu până când rămânem cu un singur număr. Ce paritate are acest ultim număr?

2. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, . . ., 2016. La fiecare pas avem voie să ştergem oricare două numere, şi în locul lor să scriem restul împărţirii sumei lor la 9. După mai mulţi paşi, la un moment dat pe tablă sunt scrise două numere, din care unul este egal cu 173. Care este numărul al doilea?

3. Pe o tablă sunt scrise toate numerele naturale nenule mai mici sau egale cu 2009. Se şterg câte trei numere la întâmplare şi se scrie pe tablă suma lor. Se repetă operaţia până când pe tablă rămâne un singur număr.
   a) Stabiliţi paritatea acestui număr.
   b) Câte operaţii se efectuează până la obţinerea acestui număr?

4. Într-un tabel 7×7 se scriu numerele: 1, 2, 3, . . . , 49. Putem scrie aceste numere într-o anumită ordine astfel încât pe fiecare linie suma a n numere $(2 \leq n \leq 5)$ să fie egală cu suma celorlalte $7 - n$ numere din acea linie?

5. Andra şi Patricia vor să coloreze cerculeţele de pe axă, cerculeţe ale căror centre corespund numerelor naturale. Andra colorează cu roşu, iar Patricia cu verde. Începe Andra, plecând din origine. Va face un salt de 5, sau 6, sau 7 unităţi şi va colora în roşu interiorul unuia dintre cercurile respective. Din poziţia respectivă Patricia va face şi ea un salt, având lungimea de 5, sau 6, sau 7 unităţi şi va colora astfel un alt cerc cu verde. Câştigă acest joc cea care va colora cerculeţul din poziţia 2016. Cine câştigă?

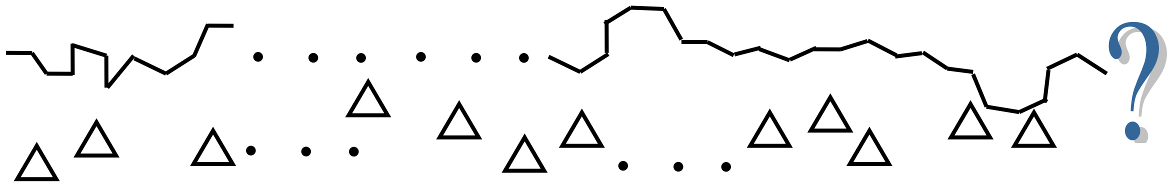


6. Prâslea cel voinic are în grădina sa un pom fermecat cu 35 mere de aur şi 30 mere de argint. În fiecare noapte zmeul vine pe furiş şi fură două mere. După care, până dimineaţă, în pom creşte un alt măr: dacă au fost furate două mere de acelaşi fel (ambele din aur sau ambele din argint) în locul lor creşte un măr de argint, iar dacă zmeul a furat două mere – unul de aur şi unul de argint, atunci în locul lor va creşte un măr de aur. Găsiţi răspunsurile (justificând) pentru următoarele întrebări.
   a) Câte mere de aur pot fi în pom, în cea de-a treia zi?
   b) Ce fel de măr este ultimul rămas în pom?
   c) Ce fel de mere a furat zmeul în cea de-a 64-a noapte?

7. Fie $n_1 = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ un număr natural a căror cifre sunt nenule, distincte. Şi fie mulţimea N, mulţimea numerelor naturale de cinci cifre care se obţin dacă permutăm în mod arbitrar cifrele. Există în această mulţime două elemente a căror diferenţă este 2015?

8. Fiecare din numerele de la 1 la 10^6 este înlocuit în mod repetat cu suma cifrelor sale, până când obținem 10^6 numere cu o cifră. Ce vom obține: mai mulți 1 sau mai mulți 2?

9. Avem o linie frântă formată din 2016 segmente, fiecare cu lungimea de un centimetru. Ştergem un segment component, obţinând astfel două linii frânte (formate nu neapărat din acelaşi număr de segmente unitate) astfel încât una să fie compusă din cel puţin 3 segmente unitate. Apoi cu liniile astfel obţinute dacă este posibil, procedăm la fel. Putem cu acest procedeu să ajungem la o mulţime de linii frânte, astfel încât fiecare linie, dacă o închidem, să devină triunghi echilateral cu perimetrul 3 cm.



10. Matei are un afiş mare care nu îi mai place. Îl rupe în nouă bucăţi. Apoi continuă rupând pe rând câte o bucată în nouă, până ce obţine peste 2500 de bucăţi foarte mici. Poate obţine la un moment dat 2010 bucăţi?

11. Matei mai rupe un afiş. De fiecare dată el rupe o bucată (sau oricare din bucăţile obţinute) în patru părţi. Este posibil să obţină în acest mod, 198 de bucăţi? Dar dacă lui Matei i se alătură Codrin şi rup împreună un alt afiş: Matei rupând fiecare bucată în patru părţi iar Codrin în şapte. Vor obţine la un moment dat 199 de bucăţi?

12. Se dă următorul tabel în care la început sunt scrise în fiecare căsuţă numerele 0, 1 sau 3 (fig a). Irina şi Smaranda se joacă cu acest tabel astfel: Irina alege din acest tabel, arbitrar, un pătrat 2 x 2 şi măreşte fiecare număr din căsuţe cu 1. Apoi alege Smaranda un pătrat 2 x 2 şi măreşte fiecare număr din căsuţe cu 1. Urmăriţi situaţia din tabelul (*b*) şi stabiliţi ce număr s-ar afla în locul lui ***x***. La fel pentru tabelul (***c***) stabiliţi ce numere se pot scrie în locul lui ***x, y*** şi **z**.

1	**1**	**0**
0	**0**	**3**
3	**1**	**1**

(a)

16		**48**
	x	
78		**93**

(b)

13	**y**	**x**
	85	**z**
30		**23**

(c)

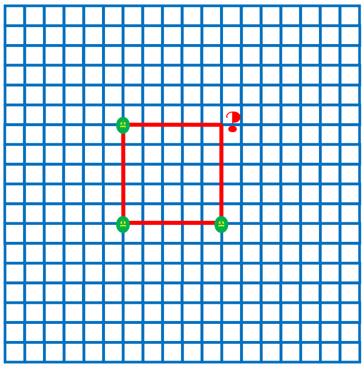
13. Pe o tablă de şah 8×8, Sergiu stabileşte o nouă regulă de mutare pentru cal: se mută în pătrăţelul adiacent, iar apoi se mută cu trei pătrăţele (în loc de două) în orice direcţie perpendiculară. Decide că această piesă de şah este un super-cal. Este posibil ca acest super-cal să treacă după un anumit număr de mutări, dintr-un pătrăţel în pătrăţelul adiacent?

14. Avem o tablă de şah. Facem următoarea transformare: alegem arbitrar o linie (sau o coloană) de pe tabelă şi modificăm colorarea (recolorăm) astfel încât pătratul negru să fie alb, iar pătratul care a fost alb să fie negru. Apoi alegem altă linie sau coloană şi procedăm la fel. Este posibil ca după un număr finit de astfel de transformări să obţinem o tablă la care să avem un pătrat alb şi toate celelalte negre?

15. Ionel şi Petre aleg la întâmplare un număr natural nenul n. Ionel împarte dublul numărului $A = 6^{3n}$ la unul dintre numerele 2, 3 sau 6 şi obţine numărul natural *B*. Petre face acelaşi lucru cu *B* şi jocul continuă până ce unul dintre ei prin împărţire nu mai obţine număr natural situaţie în care pierde. Cine câştigă şi care este strategia de câştig?

16.

Trei broscuţe se află în trei vârfuri ale unui pătrat. La o mişcare o broscuţă sare în poziţia simetrică cu a sa, faţă de una dintre celelalte două broscuţe. Poate, printr-o succesiune de astfel de mişcări, o broscuţă să ajungă în vârful liber al pătratului roşu?



17. Pe o tablă într-un tabel, sunt scrise iniţial numerele 3; 0; 1; 2, iar la fiecare pas se măreşte cu 4 cel mai mic număr scris la pasul anterior, ca în modelul următor:

Numerele iniţiale	3	0	1	2
pasul 1	3	4	1	2
pasul 2	3	4	5	2
pasul 3	. . . .			

a) Determinaţi n, ştiind că la pasul n apar scrise 4 numere a căror sumă este 258
b) După câţi paşi apare în tabel numărul 2013? Justificaţi.
c) După 2016 paşi câte numere scrise în a 4-a coloană a tabelului sunt pătrate perfecte?

18. Se consideră un număr natural A scris cu *n* cifre nenule, $n \geq 3$. Numărul B este obţinut din numărul A prin rearanjarea cifrelor acestuia. Ştiind că $A + B = 10^n$, se cere:
  a) Pentru $n = 3$, daţi un exemplu de numere *A* şi *B* cu proprietatea din enunţ;
  b) Arătaţi că *n* este impar
  c) Demonstraţi că în scrierea lui *A* există cel puţin o cifră egală cu 5.

19. Lasă numai numerele potrivite pentru ca pătratul de mai jos să fie un pătrat magic. (Un pătrat magic are suma numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare din cele două diagonale ale pătratului aceeaşi.)

7 sau 24	3 sau 14	9 sau 15
1 sau 12	10 sau 25	5 sau 8
11 sau 21	6 sau 16	3 sau 13

20. Pe o tablă este scris numărul 108. Marcel şi Andrei joacă un joc. Şterg numărul de pe tablă şi în locul lui scriu suma dintre numărul şters şi un număr nenul de o cifră. Câştigă cel care scrie 2016. Dacă începe Marcel, cine câştigă? (justificaţi)

Bibliografie.

[1] Colecţia GM Seria B
[2] Arthur Engel (Traducere de Mihai Bălună) – PROBLEME DE MATEMATICĂ *STRATEGII DE REZOLVARE*, Editura GIL
[3] I. Boreico, M. Teleucă – INVARIANŢI ŞI JOCURI, Editura GIL