Probleme de numărare

Acest tip de probleme reprezintă permanent o provocare. De cele mai multe ori cerinţa din enunţ ne sugerează că suntem în faţa unei astfel de probleme. De exemplu:

„Câţi termeni are şirul/suma?”

„Câte numere sunt astfel încât . . . ?”

„Câte triunghiuri sunt . . .?”

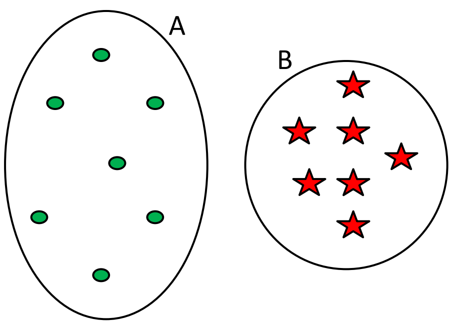
„Care este cel mai mare/mic număr pentru care . . . ?” etc.

Dintre metodele, procedeele şi formule utile pentru rezolvarea problemelor de numărare amintim următoarele:

♣ Numărul de termeni ai şirului

$x_1 = \boldsymbol{a},\ x_2 = a + p,\ x_3 = a + 2p, \dots, x_{n+1} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{np}$ este: $\boldsymbol{n} + \boldsymbol{1} = \frac{x_{n+1} - x_1}{p} + 1$

♣



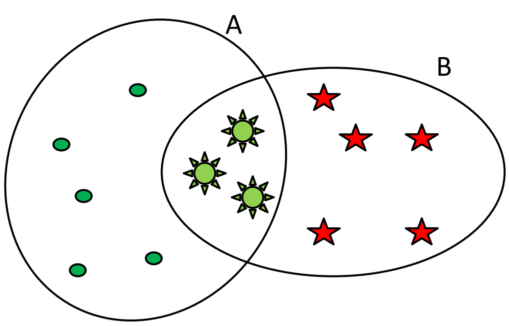
$A \cap B = \emptyset$

$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

Regula sumei

Dacă un anumit obiect $\boldsymbol{a}$ se poate alege în $\boldsymbol{m}$ moduri şi un al doilea obiect $\boldsymbol{b}$ în $\boldsymbol{n}$ moduri, fără ca o alegere a lui $\boldsymbol{a}$ să coincidă cu o alegere a lui $\boldsymbol{b}$, atunci alegerea lui ***“a sau b”*** poate fi realizată în $\boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ moduri.

♣

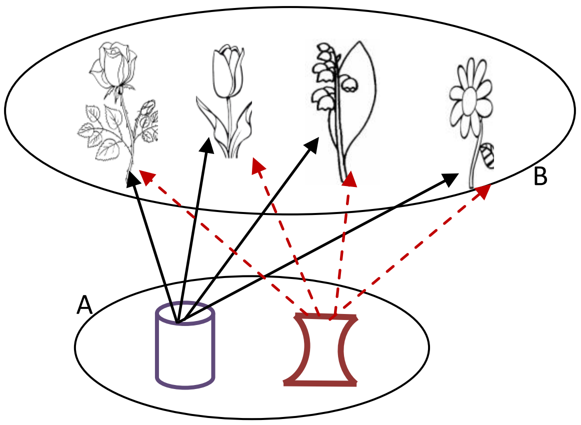


Principiul includerii şi excuderii

Dacă A şi B sunt mulţimi finite, iar $A \cap B \neq \emptyset$ atunci

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

♣



Regula produsului

Dacă un anumit obiect ***a*** se poate alege în ***m*** moduri şi dacă după fiecare alegere a lui ***a***, un obiect ***b*** se poate alege în ***n*** moduri, atunci alegerea perechii **(*a*, *b*)** poate fi realizată în $\boldsymbol{m\cdot n}$ moduri.

Dacă A şi B sunt mulţimi finite, iar $A\times B=\{(a,b)|a\in A, b\in B\}$ atunci $card(AXB)=card(A)\cdot card(B)$

♣ *Principiul cutiei.*

Dacă sunt ***n*** cutii în care se pun $n+1$ obiecte, atunci cel puţin într-o cutie se află două obiecte.

♣ *Evaluare şi exemplu.*

Dacă se cere numărul maxim/minim de elemente al unei mulţimi cu o anumită proprietate, arătăm că acel număr este k (un număr pe care-l intuim), apoi justificăm de ce ne-am oprit la *k* şi dăm un exemplu în acest sens.

♣ *Stabilirea unei corespondenţe.*

Dacă stabilim o corespondenţă de 1 la 1 între elementele a două mulţimi, dintre care una este mai uşor de numărat, vom obţine astfel şi numărul de elemente al celeilalte mulţimi.

♣ *Numărarea recurentă.*

Se aplică în situaţia în care se modifică numărul de elemente al unei mulţimi într-o succesiune de etape/paşi prin anumite procedee. Dacă numărul de elemente de la un pas *k* depinde de numărul de elemente de la pasul anterior *k*-1 (sau de la paşii anteriori), încercăm să găsim o legătură, după care calculăm din aproape în aproape.

♣ Numărul de moduri în care putem aşeza (aranja) *n* obiecte pe *n* locuri/poziţii este

$$n!=1\cdot 2\cdot\ \ldots\ \cdot n$$

♣ Numărul de moduri în care putem lua câte k $(k\leq n)$ obiecte dintr-o mulţime cu *n* obiecte este: $\dfrac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}^{k\ factori}}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$

♣ Numărul de moduri în care putem lua şi ordona (aranja) câte *k* obiecte, dintr-o mulţime cu *n* obiecte este: $n\cdot(n-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(n-k+1)$

Exemple

E1. În S.U.A. datele se scriu astfel: numărul lunii apoi numărul zilei şi anul. În Europa: numărul zilei apoi numărul lunii şi anul. Câte zile sunt într-un an, ale căror date nu pot fi determinate dacă nu ştim în care mod au fost scrise?

Se poate confunda numărul x corespunzător zilei cu cel corespunzător lunii pentru $x = \overline{1,12}$. Şi avem $12 \cdot 12 = 144$ astfel de situaţii. Însă aici am numărat de două ori situaţiile de egalitate $01.01, 02.02, \ldots 12.12$ care sunt în număr de 12. Astfel răspunsul la cerinţă este $144 - 12 = 132$.

E2. Fie $M = \{x \in \mathbb{Z} \,|-5 \leq x \leq 20\}$. Determinaţi câte submulţimi nevide $X \subset M$ satisfac următoarea proprietate: $\forall x \in X \Rightarrow \; x + |x| \in X$?

Ştim că dacă $x > 0$ atunci $|x| = x$ şi în acest caz $x + |x| = 2x$, după care $2x + |2x| = 4x$ şi observăm că nu avem submulţimi X cu elemente $x \in M, x > 0$ care să verifice proprietatea respectivă. Dar dacă $x < 0$ atunci $|x| = -x$ şi în acest caz $x + |x| = 0$. Şi astfel orice submulţime X cu elemente negative, completată cu 0 o să satisfacă proprietatea. Câte astfel de submulţimi avem? Numărul este dat de numărul de submulţimi ale mulţimii $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$. Fiecare submulţime nevidă va fi completată cu elementul 0, iar mulţimii vide îi va fi asociată $\{0\}$. Deci avem $2^5 = 32$ de submulţimi

E3. Pe un cerc sunt plasate 20 puncte verzi şi un punct roşu. Considerăm poligoanele cu vârfuri în aceste puncte. Care poligoane sunt mai multe: cele care au toate vârfurile verzi, sau cele care au un vârf roşu?

Dacă folosim doar punctele verzi, vom avea triunghiuri, patrulatere , . . . şi la final un poligon cu 19 vârfuri verzi. Dacă fiecare poligon dintre acestea îl completăm cu acel vârf roşu vom avea: patrulatere în număr egal cu numărul de triunghiuri cu vârfurile verzi, apoi atâtea pentagoane câte patrulatere cu vârfuri verzi am numărat, . . . şi un poligon cu 20 vârfuri (corespondentul celui cu 19 vârfuri). Deci până acum avem acelaşi număr. Dar . . . orice segment cu capetele verzi împreună cu punctul roşu vor forma triunghiuri. Aşa că vom avea mai multe poligoane cu un vârf roşu decât cele cu toate vârfurile verzi, iar diferenţa este dată de numărul segmentelor cu capetele verzi: $\frac{19 \cdot 18}{2} = 171$.

Fişă – probleme propuse

1. Clopotul din turla bisericii bate de 5 ori în 6 secunde. În câte secunde va bate de 20 ori?

2. Se consideră tabelul

1	1	2	3	3	4	5	5	6	. . . .	97	97	98	99	99	100
1	3	4	5	7	8	9	11	12	. . . .						

a) aflaţi suma numerelor de pe prima linie

b) Câte coloane are tabelul

c) Completaţi ultimele 6 pătrăţele ale tabelului

3. Se consideră tabloul cu 100 de linii

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

De câte ori apare în acest tablou numărul 13?

5. La o activitate în aer liber, organizată de şcoală s-au prezentat 6 părinţi şi 13 elevi dintre care 5 fete şi 8 băieţi. Pentru prima etapă se cere constituirea unei echipe formate din 2 adulţi (părinţi), 2 fete şi 3 băieţi. În câte moduri se poate forma această echipă?

6. Se dă un alfabet cu 3 litere: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ şi $\boldsymbol{c}$. Să se găsească numărul de cuvinte cu 4 litere care conţin un număr par de $\boldsymbol{a}$-uri?

7. Fie *A* o mulţime cu 20 elemente. (Generalizare)

a) Găsiţi numărul submulţimilor lui A care au exact 3 elemente.

b) Găsiţi numărul submulţimilor lui A care au exact 17 elemente.

8. Se consideră mulţimea

$A = \left\{\overline{abcd} \in \mathbb{N} \middle| \overline{abcd} \leq 2014,\ iar\ a, b, c\ şi\ d\ \ nu\ neapărat\ diferite\right\}$.

Determinaţi numărul maxim de elemente al unei submulţimi a lui *A*, care conţine numai pătrate perfecte, oricare două prime între ele.

9. Care este numărul minim de elemente care trebuie alese din mulţimea $\{1, 2, 3, \ \dots, 2016\}$ pentru a fi siguri că printre elementele alese există două cu diferenţa 3? Aceeaşi problemă pentru diferenţă 5.

10. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulţimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui *n* la *p*, iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărţirile se efectuează cu rest).
   a) Arătaţi că, dacă $n < 4024$, atunci mulţimea A_p conţine doar triunghiuri isoscele, pentru orice alegere a lui p.
   b) Determinaţi valorile lui n pentru care mulţimea A_{1006} are 5 elemente.

11. Un număr natural se numeşte *superb* dacă este multiplul numărului divizorilor săi (exemplu: 12 este *superb* deoarece are 6 divizori şi 12 este multiplu al lui 6).
   a) determinaţi cel mai mare număr superb de două cifre
   b) câte numere superbe sunt, care să aibă ultima cifră 3

12. Determinaţi câte pătrate perfecte nenule sunt astfel încât să se poată scrie sub forma $\overline{abcd} - \overline{dcba}$ unde *a, b, c* şi *d* sunt cifre nenule şi $b < c$.

13. Se consideră numerele naturale $\overline{ab}$, cu *a* şi *b* cifre nenule diferite. Care este cel mai mic număr *n* astfel încât orice mulţime de *n* astfel de numere conţine două a căror sumă să fie 100?

14. Câte soluţii numere întregi are inegalitatea $|x-2| + |2x-3| + |3x-4| \geq 1$?

15. Ana, Dora și Sabina s-au urcat pe gardul bunicii, fiecare în alt colţ al grădinii să urmărească găinile. Fiecare dintre ele a văzut câte o găină pe care celelalte două nu au văzut-o. Oricare două dintre ele au văzut câte o găină pe care a treia nu a observat-o. O găină, a fost văzută de toate cele trei fetiţe. Dintre găinile pe care le-a văzut Sabina, două au fost moţate. Dintre găinile văzute de Ana, 3 erau moţate. Iar dintre cele văzute de Dora, 4 au fost moţate. Câte găini au fost văzute în total? Şi câte dintre ele nu erau moţate?

16. Ana, Barbu, Carmen şi Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 din ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47. Arătaţi că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toţi cei patru este cel puţin egală cu $\frac{1}{15}$.

17. Pe o planetă sunt 19920 câini şi pisici, o parte cu probleme de „personalitate”. 20% dintre câini au impresia că sunt pisici aşa că miaună în loc să latre. 20% dintre pisici cred că sunt câini, aşa că . . . latră. Restul animăluţelor sunt normale. La apelul pentru masa de dimineaţă, s-a observat că 40% dintre animăluţe au mieunat. Câţi câini şi câte pisici sunt pe planetă?

18. Care triunghiuri cu laturile de lungimi numere naturale sunt mai multe: cele care au perimetrul 2015 sau cele care au perimetrul 2018?

19. Marţienii sunt roşii, verzi sau albaştri. Ei pot avea între 2 şi 5 maini, respectiv de la 3 la 20 de antene. Care este numărul minim de marţieni necesar pentru ca să avem certitudinea că avem printre aceştia 11 marţieni identici?

20. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Fiecare cutie conţine cel mult 10 bile. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, . . . , 100 conţin în total, 301 bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii?

21. Într-o sală festivă scaunele sunt dispuse într-o reţea dreptunghiulară. La un spectacol, în sală erau exact 11 băieţi în fiecare rând şi exact 3 fete în fiecare coloană. În plus, două scaune au rămas neocupate. Care este numărul minim de scaune din această sală festivă?

22. Câte dintre numerele naturale nenule mai mici decât 2018 au la fel de mulţi divizori care sunt divizibili cu 6 ca şi divizori care nu sunt divizibili cu 6?

23. Să se afle numărul fracţiilor subunitare ireductibile (pozitive) care au proprietatea că suma dintre numărător şi numitor este 2001.

24. Aflaţi câte numere de trei cifre au proprietatea că cifrele citite de la stânga la dreapta sunt invers proporţionale cu cifrele citite de la dreapta spre stânga. Aceeaşi problemă pentru numerele patru cifre.

25. Fie $A = \{100, 101, \ldots, 199\}$. Arătaţi că oricum am alege 51 de numere din Mulţimea A, există printre cele alese cel puţin două numere care au ca divizor comun pe 3, pe 5 sau pe 7.

BIBLIOGRAFIE
[1] I. Codreanu, M. Lascu – Probleme de combinatorică: Evaluare şi exemplu, Editura GIL
[2] D. Schwarz, G. Popa – Probleme de numărare, Editura GIL
[3] Colecţia GM Seria B
[4] Colecţia RMT